最大値の問題(解析学)

問題　$f(x)=x\sqrt{4-x^2}$　$(0<x<2)$　の最大値について，

(1)　微分法を用いて求めよ。

(2)　微分法を用いず，3通りの方法で求めよ。

（ 有名問題 ）

(1)　**解答**

$$f(x)=x\sqrt{4-x^2} \quad \Longrightarrow \quad f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=-\frac{2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{\sqrt{4-x^2}}$$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	／
$f(x)$	／	↗	極大	↘	／

$f(\sqrt{2})=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$

増減表より，最大値は 2　$(x=\sqrt{2}$ のとき$)$ 答

(2)　**解答 1**

$x=2\sin\theta$　とおく。$0<x<2$　より，　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$　……①

①で　$\cos\theta>0$　だから，

$f(x)=2\sin\theta\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=4\sin\theta\cos\theta=2\sin 2\theta$

①より，$0<2\theta<\pi$　であり，$f(x)$ は　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$　のとき 最大値 2 をとる。

このとき，$x=\sqrt{2}$　，　　ゆえに，最大値は 2　$(x=\sqrt{2})$ のとき　答

解答 2

$x>0$　より，$f(x)=\sqrt{x^2(4-x^2)}$　とする。$x^2=s$，$4-x^2=t$　とすると，

$0<x<2$ だから，　$s>0$，$t>0$ かつ　$s+t=4$　……②

相加平均 ≧ 相乗平均 により，　$f(x)=\sqrt{st}\leqq\dfrac{s+t}{2}=\dfrac{4}{2}=2$　（∵ ②）

等号は，$s=t$ のとき，つまり　$x^2=4-x^2 \iff x^2=2 \iff x=\sqrt{2}$　（∵ $x>0$ ）

ゆえに，$f(x)$ は，　$x=\sqrt{2}$ のとき，最大値 2 をとる。　答

解答 3　$x>0$ より，$f(x)=\sqrt{x^2(4-x^2)}$　とする。　$0<x<2$ で　$x^2(4-x^2)>0$

$g(x)=-x^4+4x^2$　，　　$x^2=t$ とおくと，　$0<t<4$　……③

$g(x)=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$

$g(x)$ は，　$t=2$，　すなわち　$x=\sqrt{2}$ のとき　最大値 4　をとる。

$f(x)=\sqrt{g(x)}$　だから，$f(x)$ の最大値は　$\sqrt{4}=2$

以上より，　$f(x)$ は，　$x=\sqrt{2}$ のとき，最大値 2 をとる。　答

山脇の超数学講座　No. 53

別解

円 $x^2+y^2=4$ の $x>0$，$y>0$ の部分を考える。

$y^2=4-x^2$ ，　$y>0$ より，$y=\sqrt{4-x^2}$

ゆえに，$f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ は、

この円に内接する図 1 のような長方形の面積を表す。

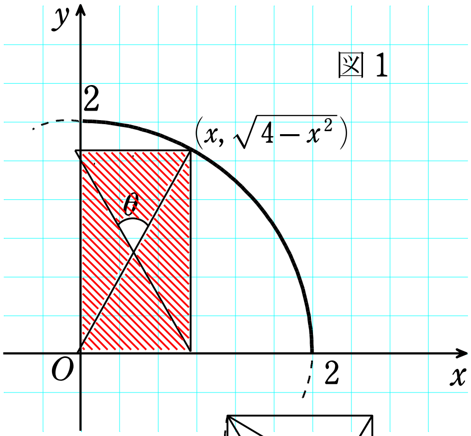


図 1

長方形の対角線の長さは等しく，l とおき，

対角線のなす角を θ とすると，

図 2 より面積は，$l\times l\sin\theta\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}l^2\sin\theta$

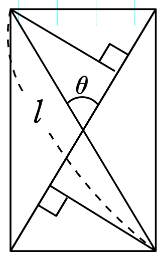


図 2

今，図 1 の長方形の対角線の長さは 2 だから，

$f(x)=\dfrac{1}{2}\times 2^2\sin\theta=2\sin\theta \leqq 2$ （等号は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき）

このとき長方形は正方形となり，1 辺の長さは，$x=\sqrt{2}$，

つまり，$f(x)$ は，<u>$x=\sqrt{2}$ のとき，最大値 2 をとる。</u>答

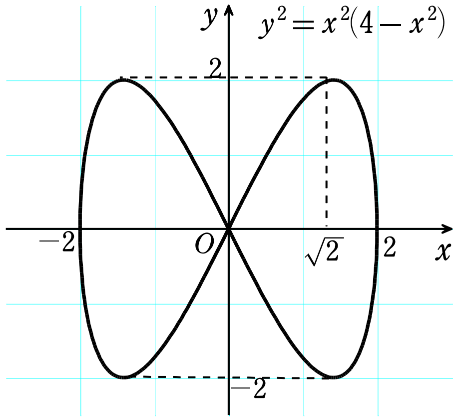
解説

この問題は非常にユニークである。まずこの関数は，「数学Ⅲ」の微分法を使わなければ微分できないので，「数学Ⅲ」まで履修した人向けの問題である。しかし，その後，「微分法を用いずに，3 通りの方法で求めよ」と，「別解」を 3 つも考えさせるのである。ここでは，<u>媒介変数としての三角関数 ($\sin\theta$) を用いる方法</u>，<u>相加平均･相乗平均の大小関係を利用する方法</u>，<u>平方根の中の 4 次関数を「複 2 次関数」と見て，平方完成で求める方法</u>を示した。

別解 では，<u>円に内接する長方形の面積に着目</u>している。

このように様々な求め方があるのも数学のおもしろさである。関数を扱う数学の分野（解析学）の中にも，「あっ，そうか」とわかる数学の考え方が豊富にある。実はこの関数は，両辺を 2 乗した式

$y^2=x^2(4-x^2)$ が背景にあり，この方程式は



リサージュ曲線という曲線を表す。第 1 象限での y の最大値は 2 である。そして，

<u>リサージュ曲線の一般的な媒介変数表示は，</u>

<u>$x=\sin at$，$y=\sin bt$</u> なのである。見事な良問と言えるだろう。

なおこの問題は，2023年9月15日・16日 の文化祭展示「難関大学数学講座の10年」のアンケートで ”一番「なるほど」と思った問題” の第 1 位に選ばれた問題である。